文章编号:1005-3085(2009)06-1050-07

非线性微分方程组边值问题多个正解的存在性*

马田田[1]， 赵增勤[2]

(1- 首都师范大学数学科学学院，北京 100048； 2- 曲阜师范大学数学科学学院，曲阜 273165)

摘　要: 本文考虑了张力桥稳定性问题的数学模型，对相应的非线性微分方程组边值问题正解的存在性问题进行了研究。通过构造特殊的锥，在不同区间上利用锥拉伸和锥压缩不动点定理，给出了一类复合型非线性微分方程组边值问题一个或多个正解的存在性，并且给出几个例子说明本文定理的应用，从而有助于对实际工程中张力桥的稳定性问题的研究。

关键词: 微分方程组；边值问题；正解；不动点定理

分类号: **AMS**(2000) 34A34; 34B15; 45G15　　**中图分类号**: O175.14; O177.91　　**文献标识码**: A

1 引言

考虑如下复合型微分方程组边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}=f(t,v), & (t,v)\in[0,1]\times[0,\infty), \\ -v''=g(t,u), & (t,u)\in[0,1]\times[0,\infty), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0, \\ v(0)=v(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中非线性项

$$f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty)),\quad g\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty)),$$

且 $g(t,0)\equiv 0$。

非线性微分方程组 (1) 可以看做如下张力桥方程的稳定状态

$$\begin{cases} y_{tt}+y_{xxxx}+\delta_1 y_t+k(y-z)^+=w(x), & (t,x)\in(0,L)\times\mathbf{R}, \\ z_{tt}-z_{xx}+\delta_2 z_t-k(y-z)^+=h(x,t), & (t,x)\in(0,L)\times\mathbf{R}, \\ y(0,t)=y(L,t)=y_{xx}(0,t)=y_{xx}(l,t)=0, & t\in\mathbf{R}, \\ z(0,t)=z(L,t)=0, & t\in\mathbf{R}. \end{cases} \tag{2}$$

这个问题在文献 [1] 中有所描述。方程组 (2) 在实际的工程问题中考虑了连接有张力绳索和路基上层面的连接处是非线性的情况，其中变量 z 表示绳索偏离平衡位置的位移，y 表示路基实际位置关于平衡状态的位移，常量 k 是连接处的弹性系数。

收稿日期: 2007-09-11. **作者简介**: 马田田 (1982年1月生)，女，博士. 研究方向：常微分方程与动力系统.

*__基金项目__: 国家自然科学基金 (10471075)；山东省自然科学基金 (Y2006A04).

微分方程组在应用数学特别是工程数学中有广泛应用，许多工程问题可转化为方程组问题来考虑。近年来关于微分方程组边值问题解的存在性和多解性有广泛研究，见文献 [2-8] 及相应的参考文献。关于方程组的文章大部分都是二阶导数的情况，文献 [8] 中考虑了形如 (1) 的情况，但对两非线性项的要求较为严格，要求它们具有相应的上控制函数。

本文方程组的导数项亦包含了二阶和四阶都有的情况，且非线性项 f, g 满足的条件与文献 [8] 有本质的不同。通过构造特殊的锥，在不同的区间上利用锥压缩和锥拉伸不动点定理，给出了方程组一个或多个正解的存在性。从而对实际工程中张力桥的稳定性问题有很大帮助。

首先给出本文的假设条件：

(H_1) $\lim\limits_{u\to 0+}\sup\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=0,\quad \lim\limits_{u\to 0+}\sup\limits_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=0;$

(H_2) $\lim\limits_{u\to \infty}\inf\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=\infty,\quad \lim\limits_{u\to \infty}\inf\limits_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=\infty;$

(H_3) $\lim\limits_{u\to 0+}\inf\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=\infty,\quad \lim\limits_{u\to 0+}\inf\limits_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=\infty;$

(H_4) $\lim\limits_{u\to \infty}\sup\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=0,\quad \lim\limits_{u\to \infty}\sup\limits_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=0;$

(H_5) $f(t,u), g(t,u)$ 关于 u 是单调增的，并且存在 $N>0$，使得

$$f\Big(\tau,\int_0^1 g(z,N)\mathrm{d}z\Big)<N,\quad \forall\,\tau,z\in[0,1].$$

2 预备知识和引理

记 $E=C[0,1]$，对任意的 $u\in E$，定义

$$\|u\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|,$$

则 $(E,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间。定义集合

$$P=\Big\{u\in E\colon u(t)\geqslant 0,\ \min_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|\Big\},$$

易知 P 为 E 中的锥。通过计算可以得出

$$(u,v)\in C^4[0,1]\times C^2[0,1]$$

为 (1) 的解，当且仅当 $(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1]$ 是如下积分方程组的解

$$\begin{cases} u(t)=\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, & t\in[0,1],\\ v(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s, & t\in[0,1],\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases} s(1-t), & 0\leqslant s<t\leqslant 1,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\tag{4}$$

为对应的 Green 函数。积分方程 (3) 可转化为如下形式

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad \forall\,t\in[0,1].$$

定义算子 A 如下

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad \forall\, t\in[0,1].$$

引理1 式(4)定义的 $G(t,s)$ 具有如下性质:

(i) $G(t,s)\leqslant G(s,s)<1,\ \forall\, t,s\in[0,1]$;

(ii) $G(t,s)\geqslant \frac{1}{4}G(s,s),\ \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4},\ 0\leqslant s\leqslant 1$。

引理2 算子 $A\colon P\to P$ 是全连续的。

证明 由 f,g 的连续性得，对任意的 $u\in P$, $Au(t)\in E$，且由引理1有

$$\|Au\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|Au(t)|\leqslant\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad (5)$$

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}Au(t)\geqslant\frac{1}{4}\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.\quad (6)$$

由(5),(6)式，有

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}Au(t)\geqslant\frac{1}{4}\|Au\|,\quad u\in P.$$

所以 $A\colon P\to P$。又函数 $G(t,s),f(t,v),g(t,u)$ 均是连续的，则 $A\colon P\to P$ 是全连续的。

引理3[9] 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是Banach空间，P 为 E 中的锥，若 Ω_1,Ω_2 为 E 中的两个开集，且满足 $\theta\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$。算子 $A\colon P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 是全连续的。若下面条件之一满足

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_1$; $\|Au\|\geqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_2$;

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_1$; $\|Au\|\leqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_2$,

则算子 A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中至少有一个不动点。

3 主要结果及其证明

定理1 假设条件 $(H_1),(H_2)$ 满足，则微分方程组边值问题(1)在 P 中至少有一个正解 $(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1]$，满足 $u(t)>0,v(t)>0$。

证明 由 (H_1) 知，存在 $\eta_1,\varepsilon_1\in(0,1)$，对任意的 $(t,u)\in[0,1]\times[0,\varepsilon_1]$，有

$$f(t,u)\leqslant\eta_1 u,\quad g(t,u)\leqslant\eta_1 u,\quad (7)$$

其中

$$\eta_1\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\leqslant 1.$$

定义集合 $\Omega_1=\{u\in E\colon \|u\|<\varepsilon_1\}$。对任意的 $u\in P\cap\partial\Omega_1$，由(7)式有

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z &\leqslant \eta_1\int_0^1 G(\tau,z)u(z)\mathrm{d}z\\ &\leqslant \eta_1\int_0^1 G(z,z)\mathrm{d}z\cdot\|u\|\leqslant\|u\|<\varepsilon_1,\end{aligned}\quad (8)$$

则由引理1及(5),(7)式有

$$\begin{aligned}\|Au\| &\leqslant \int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\int_0^1 G(\tau,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant \eta_1\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\int_0^1 G(\tau,\tau)\int_0^1 G(z,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant \eta_1\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\eta_1\int_0^1 G(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\|u\|\\ &\leqslant \|u\|, \qquad \forall\, u\in P\cap\partial\Omega_1.\end{aligned} \tag{9}$$

由(H_2)知，存在N_1, $M_1>0$，对任意的$(t,u)\in[0,1]\times[N_1,\infty)$，有

$$f(t,u)\geqslant M_1u,\quad g(t,u)\geqslant M_1u, \tag{10}$$

其中

$$\frac{M_1}{16}\Big(\int_{\frac14}^{\frac34} G(s,s)\mathrm{d}s\Big)^2\geqslant 1.$$

定义集合$\Omega_2=\{u\in E\colon u(t)>N_1\}$。对任意的$u\in P\cap\partial\Omega_2$，由(10)式有

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z &\geqslant \frac{M_1}{4}\int_{\frac14}^{\frac34} G(z,z)u(z)\mathrm{d}z\\ &\geqslant \frac{M_1}{16}\int_{\frac14}^{\frac34} G(z,z)\mathrm{d}z\cdot\|u\|\geqslant\|u\|\geqslant N_1,\end{aligned} \tag{11}$$

则由引理1及(6),(10)式有

$$\begin{aligned}Au\Big(\frac12\Big) &\geqslant \frac14\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ &\geqslant \frac14\int_{\frac14}^{\frac34} G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\frac{M_1}{4}\int_{\frac14}^{\frac34} G(\tau,\tau)\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\\ &\geqslant \frac{M_1}{16}\int_{\frac14}^{\frac34} G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\int_{\frac14}^{\frac34} G(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\frac{M_1}{16}\int_{\frac14}^{\frac34} G(z,z)\mathrm{d}z\cdot\|u\|\\ &\geqslant \|u\|, \qquad \forall\, u\in P\cap\partial\Omega_2.\end{aligned} \tag{12}$$

由引理3及(9),(12)式知，A在$P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中至少有一个不动点$u_1$，即式(1)至少有一个正解，满足$u(t)>0$, $v(t)>0$。

定理2 假设条件(H_3), (H_4)满足，则微分方程组边值问题(1)在P中至少有一个正解$(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1]$，满足$u(t)>0$, $v(t)>0$。

证明 由(H_3)得，存在$\varepsilon_2\in(0,1)$, $M_2>0$，对任意的$(t,u)\in[0,1]\times[0,\varepsilon_2)$，有

$$f(t,u)\geqslant M_2u,\quad g(t,u)\geqslant M_2u, \tag{13}$$

其中

$$\frac{M_2}{16}\Big(\int_{\frac14}^{\frac34} G(s,s)\mathrm{d}s\Big)^2\geqslant 1.$$

由 $g(t,u)$ 的连续性及 $g(t,0)\equiv 0$ 得，存在 $\varepsilon_3\in(0,\varepsilon_2)$，使得

$$g(t,u)<\frac{\varepsilon_3}{\int_0^1 G(z,z)\mathrm{d}z},\quad \forall\,(t,u)\in[0,1]\times[0,\varepsilon_3).$$

定义集合 $\Omega_3=\{u\in E\colon \|u\|<\varepsilon_3\}$。对任意的 $u\in P\cap\partial\Omega_3$，有

$$\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\leqslant\int_0^1 G(z,z)\frac{\varepsilon_3}{\int_0^1 G(z,z)\mathrm{d}z}\mathrm{d}z<\varepsilon_3, \tag{14}$$

由引理1及(6),(13)式有

$$\begin{aligned}
Au\Big(\frac{1}{2}\Big)\ &\geqslant\ \frac{1}{4}\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\
&\geqslant\ \frac{1}{4}\int_{\frac14}^{\frac34} G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\frac{M_2}{4}\int_{\frac14}^{\frac34} G(\tau,\tau)\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\\
&\geqslant\ \frac{M_2}{16}\int_{\frac14}^{\frac34} G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\int_{\frac14}^{\frac34} G(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\frac{M_2}{16}\int_{\frac14}^{\frac34} G(z,z)\mathrm{d}z\cdot\|u\|\\
&\geqslant\ \|u\|.
\end{aligned}$$

所以

$$\|Au\|\geqslant\|u\|,\quad \forall\,u\in P\cap\partial\Omega_3. \tag{15}$$

由 (H_4)，存在 $\eta_2\in(0,1),N_2>0$，对任意的 $(t,u)\in[0,1]\times[N_2,\infty)$，有

$$f(t,u)\leqslant\eta_2 u,\quad g(t,u)\leqslant\eta_2 u, \tag{16}$$

其中

$$\eta_2\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\leqslant 1.$$

由引理1及(5),(16) 式有

$$\begin{aligned}
\|Au\|\ &\leqslant\ \int_0^1 G(s,s)\int_0^1 G(\tau,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\
&\leqslant\ \eta_2\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\cdot\int_0^1 G(\tau,\tau)\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant\ \eta_2^2\int_0^1 G(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^1 G(z,z)u(z)\mathrm{d}z\\
&\leqslant\ \eta_2^2\int_0^1 G(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^1 G(z,z)\mathrm{d}z\cdot\|u\|\\
&\leqslant\ \|u\|,
\end{aligned}$$

则有 $\|Au\|\leqslant\|u\|$, $\|u\|\to\infty$。取足够大的 N_2，令 $\Omega_4=\{u\in E\colon u(t)>N_2\}$，则有

$$\|Au\|\leqslant\|u\|,\quad \forall\,u\in P\cap\partial\Omega_4. \tag{17}$$

由引理3及(15),(17)式知，A在$P\cap(\overline{\Omega}_4\backslash\Omega_3)$中至少有一个不动点$u_1$，即式(1)至少有一个正解，满足$u(t)>0,\ v(t)>0$。

定理3 假设条件(H_2), (H_3), (H_5)满足，则微分方程组边值问题(1)在P中至少有两个正解(u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in C[0,1]\times C[0,1]$，满足$u_i(t)>0,\ v_i(t)>0,\ i=1,2$。

证明 令$B_N=\{u\in E\colon u(t)>N\}$。对任意的$u\in\partial B_N\cap P$, $t\in[0,1]$，则由(H_5)及引理1有

$$\begin{aligned}\|Au\| &\leqslant \int_0^1 G(s,s)\int_0^1 G(s,\tau)f\Big(\tau,\int_0^1 G(\tau,z)g(z,u(z))\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_0^1 f\Big(\tau,\int_0^1 g(z,N)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\tau\\ &< N\leqslant\|u\|.\end{aligned}$$

所以

$$\|Au\|<\|u\|,\quad \forall\, u\in\partial B_N\cap P. \tag{18}$$

又由(H_2), (H_3)知(12), (15)式成立。取合适的ε_3, N, N_1使得$\varepsilon_3<N<N_1$。则由引理3知，A在$P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus B_N)$, $P\cap(\overline{B}_N\setminus\Omega_3)$中分别至少有一个不动点。即边值问题(1)至少有两个正解(u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in C[0,1]\times C[0,1]$，满足$u_i(t)>0,\ v_i(t)>0,\ i=1,2$。

4 例子

例1 令

$$f(t,v)=v^2,\quad g(t,u)=u^4.$$

由定理1知(1)至少有一个正解。

例2 令

$$f(t,v)=v^{\frac{1}{2}},\quad g(t,u)=u^{\frac{1}{2}}.$$

由定理2知(1)至少有一个正解。

例3 令

$$f(t,v)=\frac{v^{\frac{1}{2}}+v^2}{6},\quad g(t,u)=u^{\frac{1}{2}}+u^2,$$

取$N=1$。由定理3知(1)至少有两个正解。

参考文献：

[1] Lazer A C, Mckenna P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridge: some new connections with nonlinear analysis[J]. SIAM Review, 1990, 32: 537-578

[2] 杨志林，孙经先. 非线性二阶常微分方程组边值问题的正解[J]. 数学学报，2004, 47(1): 111-118

[3] Agarwal R P, O'Regan D. A coupled system of boundary value problems[J]. Applied Analysis, 1998, 69: 381-385

[4] Liu Y S, Yan B Q. Multiple solutions of singular boundary value problems for differential systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 287(2): 540-556

[5] Cheng X Y, Zhong C K. Existence of positive solutions for a second-order ordinary differential system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 312(1): 14-23

[6] Wei Z L. Positive solution of singular Dirichlet boundary value problems for second order differential equation system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(2): 1255-1267
[7] Hu L, Wang L L. Multiple positive solutions of boundary value problems for systems of nonlinear second-order differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 335(2): 1052-1060
[8] Lü H Y, Yu H M, Liu Y S. Positive solutions for singular boundary value problems of a coupled system of differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 302(1): 14-29
[9] Guo D, Lakshmikanthan V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. New York: Academic Press, 1988
[10] 安世全，安玉坤. 一类常微分方程组正解的存在性[J]. 工程数学学报，2004, 21(1): 71-74
[11] Zhao Z Q, Wang X H. Property and application of solutions to singular second-order boundary value problems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(3): 539-542

Existence of Multiple Positive Solutions of Boundary Value Problems for Systems of Nonlinear Differential Equations

MA Tian-tian[1], ZHAO Zeng-qin[2]

(1- School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048;
2- School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165)

Abstract: In this paper, we concern the mathematical model relevant with the stability of suspension bridge, which is about the existence of positive solutions of boundary value problems for systems of nonlinear differential equations. By constructing a special cone and using the fixed point theorems of cone expansion and cone compression in different intervals, we give the existence and multiplicity of positive solutions to boundary value problems for a kind of coupled systems of nonlinear differential equations. Examples are also given to illustrate our main results, which could help us to study the stability of the suspension bridge.

Keywords: systems of differential equations; boundary value problems; positive solutions; fixed point theorems